ÜBER ERZEUGENDENSYSTEME VON FUCHSSCHEN GRUPPEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der
Ruhr-Universität Bochum

von

NORBERT PECZYNSKI

aus

Dortmund

Bochum 1975

1976

ÜBER ERZEUGENDENSYSTEME VON FUCHSSCHEN GRUPPEN

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Abteilung für Mathematik
an der
Ruhr-Universität Bochum

von
NORBERT PECZYNSKI
aus
Dortmund

Bochum 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Dissertation eingereicht am: 9.12.1975
Tag der mündlichen Prüfung: 1o.o2.1976

Dekan: Prof. Dr. H. Amann
Referent: Prof. Dr. H. Zieschang
Korreferent: Prof. Dr. F. Levin

aku- Fotodruck, 86 Bamberg, Färbergasse 8 R

Inhaltsverzeichnis

Einleitung 1

§ 1 Die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam 3

§ 2 Über die Gleichung $\prod x_{\nu_i}^{\varepsilon_i} = \prod_{i=1}^{m} s_i$ im freien Produkt zyklischer Gruppen 10

§ 3 Minimale Erzeugendensysteme von Fuchsschen Gruppen 27

Literaturverzeichnis

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546609_0026

Einleitung

Es sei G eine ebene diskontinuierliche Gruppe mit kompaktem Fundamentalbereich. G besitzt dann eine Darstellung

$$G = \langle s_1,\dots,s_m,t_1,u_1,\dots,t_g,u_g \mid s_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{m} s_i \prod_{j=1}^{g} [t_j,u_j] = 1 \rangle .$$

In dieser Arbeit sollen die minimalen Erzeugendensysteme von G bis auf freie Äquivalenz [8] beschrieben werden. Ein System $\{x_1,\dots,x_k\}$ heiße dabei minimal, falls $k = rg(G)$, dem Rang von G. Nach Satz 3 [6] ist der Rang von G

$rg(G) = 2g$	für $m = 0$
$rg(G) = m-2$	für m gerade, $g = 0$ und alle $\alpha_i = 2$ bis auf eines, das ungerade ist
$rg(G) = 2g+m-1$	in allen anderen Fällen

G. Rosenberger beweist in [7, Satz 13] das folgende Resultat: Ist $m \geq 2$, $g > 0$ und $\{x_1,\dots,x_{2g+m-1}\}$ ein minimales Erzeugendensystem von G, so gibt es einen freien Übergang zu einem System der Form $\{s_{\nu_1}^{\gamma_1},\dots,s_{\nu_{m-1}}^{\gamma_{m-1}},t_1,u_1,\dots,t_g,u_g\}$ mit $\nu_1 < \dots < \nu_{m-1}$ und $(\gamma_i,\alpha_{\nu_i}) = 1$.

Hier wird ein analoger Satz für den Fall $g = 0$ bewiesen (3.3). Sei $G = \langle s_1,\dots,s_m \mid s_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{m} s_i = 1 \rangle$, $m \geq 6$, $\alpha_i \geq 3$ und $\{x_1,\dots,x_{m-1}\}$ ein minimales Erzeugendensystem von G. Dann gibt es ein zu $\{x_1,\dots,x_{m-1}\}$ frei äquivalentes System der Form $\{s_{\nu_1}^{\beta_1},\dots,s_{\nu_{m-1}}^{\beta_{m-1}}\}$ mit $\nu_1 < \dots < \nu_{m-1}$ und $(\beta_i,\alpha_{\nu_i}) = 1$.

Die Voraussetzung $\alpha_i \geq 3$ läßt sich nicht ohne weiteres verallgemeinern. G. Rosenberger gibt in [7] ein Gegenbeispiel für den Fall, daß einige $\alpha_i = 2$ sind.

$$G = \langle s_1,s_2,s_3,s_4 \mid s_1^{10} = s_2^2 = s_3^2 = s_4^5 = s_1s_2s_3s_4 = 1 \rangle .$$

G wird erzeugt von $x_1 = s_1^4$, $x_2 = s_1s_2$, $x_3 = s_1s_3$ und es gibt keinen freien Übergang zu einem System der oberen Art.

Der Beweis von 3.3 basiert, wie auch die Beweise in [7], [6] im wesentlichen auf der von H. Zieschang in [8] entwickelten Nielsenschen Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam.

Im ersten Teil der Arbeit werden die wichtigsten Resultate noch einmal kurz aufgeführt und einige Folgerungen behandelt, die die Anwendung auf unseren Fall etwas vereinfachen. Der zweite Teil behandelt die Gleichung $\prod_{i=1}^{k} x_{\nu_i}^{\varepsilon_i} = (s_1 \ldots s_m)^{\alpha}$ im freien Produkt der von den s_i erzeugten zyklischen Gruppen. Es stellt sich heraus, daß diese Gleichung im wesentlichen nur von $x_{\nu_i}^{\varepsilon_i} = s_j^{\beta_j}$, $(\beta_j, \alpha_j) = 1$ $(\alpha_j = \operatorname{ord} s_j)$ erfüllt werden kann (Satz 2.22). Der dritte Teil enthält den Beweis von Satz 3.3.

Ich möchte Herrn H. Zieschang für die Betreuung dieser Arbeit und für viele anregende Gespräche danken. Ebenfalls danke ich Herrn G. Rosenberger für manche wertvolle Diskussion.

§ 1 Die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam

Es sei G eine Gruppe, in der eine Länge L definiert ist, also eine Abbildung $L : G \to \mathbb{N}$ mit $L(1) = 0$.

1.1 Definition.

Ein System $\{x_i\}_{i\in I} \subset G$ hat die Nielsensche Eigenschaft (bezüglich L), wenn gilt:

(i) $L(x_i^{\varepsilon}x_j^{\mu}) \geq \max\{L(x_i),L(x_j)\}$ $\quad i,j \in I,\ \varepsilon,\mu = \pm 1$ und $i \neq j$ oder für $i = j$ $\varepsilon = \mu = \pm 1$

(ii) $L(x_i^{\varepsilon}x_l x_j^{\mu}) > L(x_i)-L(x_l)+L(x_j)$ $\quad$ für $i,l,j \in I,\ \varepsilon,\mu = \pm 1$, $i \neq l \neq j$, $x_l \neq 1$ oder für $l = i$ und $\varepsilon = 1$ bzw. $j = l$ und $\mu = 1$

Falls ein System die Nielsensche Eigenschaft hat, so liefert bei einem Produkt in den x_i, das frei gekürzt ist (also keine Stelle $x_{\nu_i}^{\varepsilon}x_{\nu_i}^{-\varepsilon}$, $\varepsilon = \pm 1$, enthält), jedes x_i, das vorkommt, einen Beitrag. Es wird also kein x_i ganz gekürzt. Nielsen benutzte diese Eigenschaft, um die Untergruppen von freien Gruppen zu untersuchen [4] . Andere Anwendungen sind auch in [9] zu finden.

Nun kann man nicht in jeder Gruppe eine sinnvolle Länge definieren. Dies wurde etwa in [2] untersucht mit einigen Verallgemeinerungen in [1] . Im wesentlichen existiert eine Längenfunktion, die gewissen "natürlichen" Axiomen genügt, nur in freien Produkten.

Wir werden nur die beiden folgenden Längenbegriffe benötigen:

1. Sei $G = \mathop{\ast}_{i\in I} H_i$ das freie Produkt der Gruppen H_i.

   Jedem $x \in G$, $x \neq 1$, kann eine Normalform zugeordnet werden [3] . $x = h_1 \ldots h_n$, wobei die h_i abwechselnd aus verschiedenen Faktoren sind. Ferner sei $h_i \neq 1$, $i = 1,\ldots,n$. Wir definieren dann $\Delta(x) := n$, $\Delta(1) = 0$. Es gilt $\Delta(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

2. Sei $G = \mathop{*}_{i\in I}{}_A H_i$ das freie Produkt der Gruppen H_i mit vereinigter Untergruppe A. Wir wählen in jedem Faktor H_i ein System von Repräsentanten der Linksrestklassen von H_i nach A. Die Untergruppe A werde jeweils durch 1 repräsentiert. Jedes $x \in G$ besitzt dann eindeutig eine Darstellung

$$x = ah_1 \ldots h_n .$$

Dabei ist $a \in A$, und die h_i sind die Restklassenvertreter, die abwechselnd aus verschiedenen Faktoren sind und nicht gleich 1. Wir definieren dann:

$$L(x) = L(ah_1 \ldots h_n) = n.$$

Es folgt $L(a) = 0$ für $a \in A$ und $L(x) = L(x^{-1})$. Es zeigt sich, daß die Länge L unabhängig von der Wahl des Repräsentantensystems ist [3] .

Es erweist sich für uns als zweckmäßig, die Definition 1.1 etwas abzuändern.

<u>1.2 Definition.</u>

Sei G eine Gruppe mit Längenfunktion L. Ein System $\{x_i\}_{i\in I} \subset G$ hat die <u>erweiterte Nielsensche Eigenschaft</u> (N'-Eigenschaft), falls gilt:

(i) $L(x_i^{\varepsilon}x_j^{\mu}) \geq \max\{L(x_i),L(x_j)\}$ $\quad$ $i,j \in I$, $\varepsilon,\mu = \pm 1$ und $i \neq j$ oder für $i = j$ $\varepsilon = \mu = \pm 1$

(ii) $L(x_i^{\varepsilon}x_l x_j^{\mu}) > L(x_i^{\varepsilon})-L(x_l)+L(x_j^{\mu})$ $\quad$ $i,j,l \in I$, $\varepsilon,\mu = \pm 1$, $i \neq l \neq j$, $x_l \neq 1$ oder für $l = i$, $\varepsilon = 1$ und $l \neq j$ bzw. $l = j$, $\mu = 1$ und $l \neq i$

Im Fall, daß G ein freies Produkt ist, kann ein System, das ein Element enthält, das in einem Faktor liegt bzw. konjugiert zu einem Element eines Faktors ist, nicht die Nielsensche Eigenschaft haben. Es ist die Bedingung (ii) aus 1.1 nicht erfüllt. Es ist aber wohl möglich, daß ein solches System die N'-Eigenschaft hat.

Der Längenbegriff ist allein nicht ausreichend, um einem System, etwa in einer freien Gruppe [9] , die Nielsensche Eigenschaft

zu geben. Es wird eine feinere Ordnung auf G benötigt. Um das für freie Produkte mit Amalgam zu tun, hat H. Zieschang in [8] eine etwas modifizierte Normalform für Elemente in G definiert, die sich als sehr zweckmäßig erweist.

1.3 Sei $G = \mathop{*}_{i \in I^A} H_i$ und r_j seien Rechtsrestklassenvertreter von A in den H_i bzw. l_j Linksrestklassenvertreter. Wir wählen als Linksrestklassenvertreter die Inversen der Rechtsrestklassenvertreter. Dann besitzt jedes $x \in G$ eine Darstellung

$$x = r_1 \dots r_m k l_m \dots l_1 .$$

Dabei sind die r_i, $l_i \neq 1$ und abwechseln aus verschiedenen Faktoren. Der Zusammenhang mit der unter 2. definierten Länge L wird gegeben durch

1.4 $L(x) = 0$ falls $m = 0$, $k \in A$

$L(x) = 2m$ falls $m \geq 1$, $k \in A$ und r_m, l_m aus verschiedenen Faktoren H_i

$L(x) = 2m + 1$ falls $k \in H_i$, $k \notin A$ und weder l_m noch r_m aus H_i.

$r_1 \dots r_m$ heißt die vordere Hälfte, $l_m \dots l_1$ die hintere Hälfte und k der Kern von x.

Der Vorteil dieser Normalform liegt darin, daß bei einem Produkt in den x_i ein Kürzen zum großen Teil auf ein freies Kürzen zurückgeführt werden kann.

Es soll nun eine Ordnung auf G eingeführt werden. Zunächst möge eine vollständige Ordnung der Faktoren und in jedem Faktor der Restklassenvertreter gegeben sein. Dabei werden r, r^{-1} nicht unterschieden. Ferner mögen die Produkte der Restklassenvertreter $r_1 \dots r_m$ ($r_i \neq 1$ und die r_i sind abwechselnd aus verschiedenen Faktoren) durch $<$ geordnet sein, so daß gilt

1.5 (a) $r_1 \dots r_m < r_1' \dots r_m'$ und $r_1' \dots r_m' < r_1 \dots r_m \Rightarrow$
$r_1 \dots r_m = r_1' \dots r_m'$

(b) $r_1 \dots r_m < r_1' \dots r_m' \Rightarrow r_1 \dots r_m r_{m+1} < r_1' \dots r_m' r_{m+1}'$
für beliebige r_{m+1}, r_{m+1}'

(c) Vor einem Produkt $r_1 \dots r_{m-1} r_m$ liegen nur endlich viele Produkte $r_1 \dots r_{m-1} r$, wobei r ein Restklassenvertreter aus demselben Faktor wie r_m ist.

Wir ordnen nun die Paare $\{x,x^{-1}\}$, $x \in G$. Dabei sei die Bezeichnung so gewählt, daß die vordere Hälfte von x bezüglich $<$ vor der von x^{-1} steht. Es sei

$$\{x,x^{-1}\} \lessdot \{x',x'^{-1}\},$$

falls

(a) $L(x) < L(x')$ oder bei $L(x) = L(x')$

(b) Die vordere Hälfte von x bezüglich $<$ echt kleiner ist als die vordere Hälfte von x' oder falls sie gleich sind

(c) Die vordere Hälfte von x^{-1} vor der von x'^{-1} steht ($\leqq$)

Gilt also $\{x,x^{-1}\} \lessdot \{x',x'^{-1}\}$ und $\{x',x'^{-1}\} \lessdot \{x,x^{-1}\}$, so unterscheiden sich x und x' nur im Kern.

1.6 Definition.

Ein System $X \subset G$ heiße kürzer als ein System $Y \subset G$, falls es Indizierungen $X = \{x_j\}_{j\in J}$ und $Y = \{y_j\}_{j\in J}$ gibt, so daß $\{x_j,x_j^{-1}\} \lessdot \{y_j,y_j^{-1}\}$ für alle $j \in J$, aber für mindestens ein j nicht $\{y_j,y_j^{-1}\} \lessdot \{x_j,x_j^{-1}\}$ gilt.

Mit F_J bezeichnen wir die freie Gruppe in den freien Erzeugenden $\{f_j\}_{j\in J}$. Sei G eine Gruppe und $\{v_j\}_{j\in J}$ ein System von Elementen aus G. Durch $f_j \to v_j$ wird ein Homomorphismus h von F_J auf die von den v_j in G erzeugte Untergruppe $\mathfrak{U}$ definiert.

1.7 Definition.

Zwei Systeme $\{v_j\}_{j\in J}$ und $\{v_j'\}_{j\in J}$ von Elementen aus G heißen frei äquivalent, falls es einen Automorphismus α von F_J gibt, so daß $h \circ \alpha(f_j) = v_j'$ für alle $j \in J$ gilt.

α induziert im allgemeinen auf $\mathfrak{U}$ keinen Homomorphismus.

Im weiteren sei $G = H_1 *_A H_2$ ein freies Produkt mit Amalgam. In G sei eine Länge L und Ordnung definiert. H. Zieschang beweist in [8] den folgenden Satz.

1.8 Satz.

Sei $G = H_1 *_A H_2$. $\{x_1,\dots,x_n\} \subset G$ sei ein System von Elementen von G. Dann gibt es ein zu $\{x_1,\dots,x_n\}$ frei äquivalentes System $\{y_1,\dots,y_n\}$, das höchstens kleiner als $\{x_1,\dots,x_n\}$ ist und eine der folgenden Eigenschaften hat.

(i) Für jedes $w \in gp\{y_1,\dots,y_n\}$ gibt es eine Darstellung $w = \prod_{i=1}^{k} y_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$, $\varepsilon_i = \pm 1$ mit $L(y_{\nu_i}) \le L(w)$, $i = 1,\dots,k$

(ii) Es gibt ein Produkt $P = \prod_{i=1}^{k} y_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$, $y_{\nu_i} \in A$, $P \neq 1$, und in einem Faktor H_i ein Element $x \notin A$ mit $xPx^{-1} \in A$

(iii) Es gibt ein Produkt $P = \prod_{i=1}^{k} y_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$, wobei nicht alle y_{ν_i} in A liegen, so daß $P \in gAg^{-1}$ für ein geeignetes $g \in G$. Dabei liegen die y_{ν_i} alle in einer zu einem Faktor konjugierten Untergruppe. □

Wir wollen nun annehmen, daß $\{x_1,\dots,x_n\}$ ein minimales Erzeugendensystem von $G = H_1 *_A H_2$ ist. Wegen der Minimalität des Erzeugendensystems gelten dann folgende einfache Bemerkungen:

1.9 Sei $U \subset G$ eine Untergruppe von G. Dann ist die Anzahl der x_i, die in U liegt, höchstens gleich dem Rang von U. Jedes Teilsystem $\{x_{\nu_1},\dots,x_{\nu_k}\}$ von $\{x_1,\dots,x_n\}$ erzeugt also eine Untergruppe vom Rang k. Es liegen also in H_1, H_2, A höchstens so viele x_i, wie der Rang von H_1, H_2, A angibt.

1.10 Sei $\{x_{\nu_1},\dots,x_{\nu_k}\}$ ein Teilsystem von $\{x_1,\dots,x_n\}$, das die Untergruppe U von G erzeugt. Dann gibt es keine zu U konjugierte Untergruppe von G, in der mehr als ein weiteres x_j liegt.

Sind nämlich zwei weitere x_j in aUa^{-1}, so nimmt man an Stelle dieser x_j das a in das Erzeugendensystem und erhält einen Widerspruch zur Minimalität. □

Wir erhalten nun das folgende Korollar zu Satz 1.8:

1.11 Korollar.

Sei $G = H_1 *_A H_2$ ein freies Produkt mit Amalgam A. $\{x_1,\dots,x_n\}$ sei ein minimales Erzeugendensystem von G, das auch bezüglich der Länge und Ordnung in G minimal ist unter allen frei äqui-

valenten Systemen. Ferner mögen weder die Situation (ii) noch (iii) aus Satz 1.8 eintreten. Dann gibt es natürliche Zahlen $1 \leq k_1 \leq k_2 \leq n$, so daß

(a) $x_1,\ldots,x_{k_1} \in A$ und erzeugen A. Dabei ist $\mathrm{rg}A = k_1$

(b) $x_1,\ldots,x_{k_1},x_{k_1+1},\ldots,x_{k_2} \in H_1$ und erzeugen H_1. Dabei ist $\mathrm{rg}H_1 = k_2$

(c) $x_1,\ldots,x_{k_1},x_{k_2+1},\ldots,x_n \in H_2$ und erzeugen H_2. Dabei ist $\mathrm{rg}H_2 = k_1 + n - k_2$

Beweis. Sei also $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ein minimales Erzeugendensystem von G. Nach Satz 1.8 bleibt also wegen der Voraussetzungen nur die Situation (i). Es gibt also für jedes $g \in G$ eine Darstellung als Produkt in den x_i, wobei die Länge der x_i kleiner oder gleich der Länge von g ist. Da $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ein Erzeugendensystem von G bildet, kann man $L(g) \leq 1$ wählen, und da das Erzeugendensystem minimal ist, muß jedes x_i einmal bei der Darstellung eines g mit $L(g) \leq 1$ auftreten. Es folgt $L(x_i) \leq 1$, $i = 1,\ldots,n$. Wegen 1.8(i) lassen sich auch alle Elemente von A durch Elemente der Länge 0 darstellen. Ein Teilsystem von $\{x_1,\ldots,x_n\}$, also etwa $\{x_1,\ldots,x_{k_1}\}$, erzeugt damit A. Zusammen mit 1.9 folgt die Behauptung (a). Analog folgt (b) und (c). □

Sei nun $G = H_1 *_A H_2$ und $\{x_1,\ldots,x_n\}$ ein System von Elementen aus G. Wir schreiben die x_i nach Wahl der Restklassenvertreter wie in 1.3 in Normalform

$$x_i = r_{i_1} \ldots r_{i_{m_i}} k_i l_{i_{m_i}} \ldots l_{i_1}.$$

Ferner mögen die x_i der N'-Eigenschaft genügen. Eine Stelle von x_i ist dann eines der Symbole r_{i_n}, l_{i_n} oder k_i, falls $k_i \notin A$. Wie bei der Nielsenschen Eigenschaft kann man auch bei einem System, das der N'-Eigenschaft genügt, eine standhafte Stelle auszeichnen.

1.12 Hilfssatz.

Sei G und $\{x_1,\ldots,x_n\}$ wie oben.

$$P = \prod_{j=1}^{g} x_{\nu_j}^{\varepsilon_j} = r_1 \ldots r_m k l_m \ldots l_1$$

sei ein freigekürztes Produkt in den x_i. Ferner gelte:

$$\nu_i = \nu_{i+1} \Rightarrow \nu_{i-1} \neq \nu_i \text{ und } \nu_{i+2} \neq \nu_i$$

(Es treten also nie mehr als zwei gleiche x_i nebeneinander auf.)

Dann gibt es zu jeder Stelle u von P entweder einen Index i und eine Stelle v in $x_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$, so daß $u = ava'$ $(a,a' \in A)$, oder es gibt zwei Indices i, i+1 und Stellen v, v' von $x_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$, $x_{\nu_{i+1}}^{\varepsilon_{i+1}}$, so daß $u = avv'a'$ $(a,a' \in A)$ ist.

Ferner gibt es umgekehrt zu jedem i eine Stelle in P, an deren Bildung $x_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$ in der oben beschriebenen Weise beteiligt ist.

Zum Beweis vergleiche [8, 2.21], [7, 2.5]. □

Wir können also in jedem x_i eine <u>standhafte Stelle</u> auszeichnen, die aber im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt ist.

§ 2 Über die Gleichung $\prod x_{\nu_i}^{\varepsilon_i} = \prod_{i=1}^{m} s_i$ im freien Produkt zyklischer Gruppen

Sei $G = \langle s_1,\ldots,s_m \mid s_i^{\alpha_i} = 1\rangle$, $\alpha_i > 2$. Wir führen in G die Länge Δ bezüglich der Zerlegung von G in ein freies Produkt zyklischer Gruppen ein. Ferner sei in G eine Ordnung wie in § 1 definiert.

2.1 Hilfssatz.

Sei $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset G$ ein bezüglich freier Äquivalenz und der in G definierten Ordnung minimales System von Elementen aus G. Dann gilt

(i) Ein x_i ist konjugiert zu s_j^{α} für ein geeignetes j und $(\alpha,\alpha_j) \neq 1$
oder

(ii) Die x_i haben die N'-Eigenschaft

Beweis. Angenommen, die x_i haben nicht die N'-Eigenschaft, d.h., es gibt x_i, x_k, x_l mit $\Delta(x_i^{\varepsilon}x_k x_l^{\mu}) \leq \Delta(x_i)-\Delta(x_k)+\Delta(x_l)$. Also ist $x_k = ws_j^{\alpha}v$ und $x_i^{\varepsilon} = w's_j^{\beta_i}w^{-1}$ und $x_l^{\mu} = v^{-1}s_j^{\beta_l}w''$. Aus der Minimalität folgt dann $w = v^{-1}$ [8, Seite 8]. Ist nun $(\alpha,\alpha_j) = 1$, so gibt es ein β mit $x_k^{\beta} = ws_jw^{-1}$ und damit wegen $x_i^{\varepsilon}\cdot x_k^{-\beta\cdot\beta_i} = w'w^{-1}$ einen Widerspruch zur Minimalität von $\{x_1,\ldots x_n\}$. (Vergleiche auch [7, Satz 8]). □

Wir wollen uns in den Untersuchungen auf den Fall (ii) des Hilfssatzes beschränken. Ein System $\{x_1,\ldots,x_n\}$ hat also immer die N'-Eigenschaft.

2.2 Hilfssatz.

Sei $\{x_1,\ldots,x_n\} \subset G$ und habe die N'-Eigenschaft, $(n \leq m)$. Es gelte eine Gleichung

$$(*) \qquad y\Big(\prod_{i=1}^{m} s_i\Big)^{\alpha}y^{-1} = \prod_{j=1}^{k} x_{\nu_j}^{\varepsilon_j};\ \alpha > 0,$$

wobei nicht alle x_{ν_j} zu Potenzen von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ konjugiert sind. Dann gibt es ein Produkt

$$(**)\quad y'(\prod_{i=1}^{m} s_i)^{\beta} y'^{-1} = \prod_{j=1}^{l} x_{\mu_j}^{\varepsilon_j},$$

in dem nicht alle x_{μ_j} zu Potenzen von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ konjugiert sind, das eine der folgenden Eigenschaften hat:

(a) Es gibt ein x_i, das nicht zu einer Potenz von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ oder eines s_j konjugiert ist und in (**) genau einmal auftritt.

(b) Alle x_i, die in (**) auftreten und nicht zu Potenzen von s_j oder $\prod_{i=1}^{m} s_i$ konjugiert sind, treten genau einmal, jeweils mit Exponenten +1 und -1, auf.

Beweis. Angenommen, es tritt der Fall (a) nicht ein. Wir geben einen Prozeß an, der die Anzahl der in der Gleichung (*) beteiligten x_i reduziert oder das in (*) auftretende α verkleinert, falls (b) nicht gilt. Es möge also (*) nicht die Bedingung (b) erfüllen. Das heißt, es gibt zwei Indices i, j mit $\nu_i = \nu_j = \kappa$ und $\varepsilon_i = \varepsilon_j$. Wir setzen oBdA $\varepsilon_i = \varepsilon_j = 1$. Ferner möge $\varepsilon_\lambda \neq 1$ gelten, falls $\nu_\lambda = \kappa$ und $i < \lambda < j$. Es sei nun $x_\kappa = us_\lambda^\beta v$, wobei s_λ^β eine standhafte Stelle von x_κ ist. Dann gilt

$$x_\kappa(\prod_{l=i+1}^{j-1} x_{\nu_l}^{\varepsilon_i})x_\kappa = us_\lambda^\beta v(\prod_{l=i+1}^{j-1} x_{\nu_l}^{\varepsilon_i})us_\lambda^\beta v = us_\lambda^{\beta'}(s_\lambda \ldots s_m s_1 \ldots s_\lambda)^\gamma s_\lambda^{\beta''} v.$$

Ist nun $\gamma = 0$, so folgt aus der N'-Eigenschaft $i+1 = j$ und x_κ wäre konjugiert zu einer Potenz von s_λ. Das aber ist nach Annahme ausgeschlossen. Es folgt $\gamma > 0$. Analog wie in [6, 2.1] erhalten wir dann ein Produkt mit kleinerem α oder kleinerem k, in dem ebenfalls noch x_i vorkommen, die nicht zu einer Potenz von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ konjugiert sind. Nach endlich vielen Schritten tritt also der Fall (a) oder (b) ein. □

Es soll nun die Gleichung

$$P = \prod_{i=1}^{q} x_{\nu_i}^{\varepsilon_i} = (\prod_{i=1}^{m} s_i)^{\alpha},\ \alpha > 0$$

untersucht werden. Wir setzen dabei $m \geq 3$ voraus und wollen annehmen, daß P ein freigekürztes Produkt in den x_{ν_i} ist. Es möge der Fall (b) von Hilfssatz 2.2 eintreten, d.h., es gibt ein x_{ν_i}, das nicht zu einer Potenz von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ konjugiert ist und alle x_{ν_i}, die nicht zu einer Potenz von einem s_i oder $\prod_{i=1}^{m} s_i$ konjugiert sind, treten genau einmal, jeweils mit Exponenten +1 und -1, auf.

2.3 Bemerkung.

Ist in P ein x_{ν_j} konjugiert zu s_j^α, so kann kein von x_{ν_j} verschiedenes Element etwas zu s_j^α beitragen. D.h. $x_{\nu_j} = as_j^\alpha a^{-1}$, dann gibt es kein x_{ν_k} mit $x_{\nu_k}^{\pm 1} = as_j^\beta w$.

Beweis. Gibt es ein solches x_{ν_k}, dann wäre $\Delta(x_{\nu_j}x_{\nu_j}x_{\nu_k}^{\pm 1}) = \Delta(as_j^{2\alpha+\beta}w) \leq \Delta(x_{\nu_k})$ im Widerspruch zur N'-Eigenschaft. □

Wir wollen nun Potenzen von zu s_j oder $\prod_{i=1}^{m} s_i$ konjugierten $x_{\nu_i}^\varepsilon$ in P zusammenfassen und erhalten ein Produkt

$$P = \prod_{j=1}^{g'} x'^{\mu_j}_{\nu_j} = (\prod_{i=1}^{m} s_i)^\alpha, \ \alpha > 0, \ \mu = \pm 1, \ x'_{\nu_i} \neq 1,$$

wobei zwei benachbarte x'_{ν_i} nicht mit dem gleichen Konjugationsfaktor zu Potenzen desselben s_j oder $\prod_{i=1}^{m} s_i$ konjugiert sind. Es ist $x'_{\nu_j} = x_{\nu_i}$ für ein i, falls x'_{ν_i} weder zu einem s_j noch zu $\prod_{i=1}^{m} s_i$ konjugiert ist.

Es gilt

2.4 Hilfssatz.

Die x'_{ν_i} haben die N'-Eigenschaft.

Beweis. Wegen 2.3 ist ein x'_{ν_i}, das aus einer Potenz von Elementen entstanden ist, die zu einem s_j konjugiert waren, gleich as_ja^{-1}, kann also nicht über die Hälfte gekürzt werden. Die anderen x'_{ν_i} stammen von x_{ν_i}, die nicht zu einer Potenz eines s_j konjugiert sind. Sie haben nach [7, 2.5] die Nielsensche Eigenschaft. Die Behauptung folgt nun aus 2.3 zusammen mit [9, Seite I. 12]. □

In jedem x'_{ν_i} zeichnen wir ein standhaftes Zeichen aus. Tritt x'_{ν_i} mit Exponenten +1 und -1 auf, so ist das standhafte Zeichen wegen $m \geq 3$ aus Gründen der Reihefolge eindeutig bestimmt.

2.5 Es sei ein x'_{ν_i} konjugiert zu einer Potenz von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ mit positivem Exponenten. Die Normalform von x'_{ν_i} in G hat die Gestalt

(1) $a(s_j \ldots s_m s_1 \ldots s_{j-1})^\gamma a^{-1}$, $\gamma > 0$, wobei a weder mit s_j^{-1} noch mit

s_{j-1} endet und Normalform in G hat.

Es gilt

(2) In dem Produkt P kann höchstens das a gekürzt werden.

(3) OBdA können wir annehmen, daß der Konjugationsfaktor ungleich 1 ist.

Beweis. Zu (2): Wird in P mehr als das a gekürzt, so gibt es ein Element x'_{ν_k} mit $x'^{\pm 1}_{\nu_k} = a(s_{j-1}^{-1}\dots s_j^{-1})^{\beta} s_{j-1}^{-1}\dots s_k^{-1} w$, wobei $\beta < \gamma$ und w nichts von x'_{ν_i} kürzt. Es folgt $x'_{\nu_i} x'^{\pm 1}_{\nu_k} = a(s_j\dots s_m s_1\dots s_{j-1})^{\gamma-\beta-1}(s_j\dots s_{k-1})w$ (k-1 mod m). Da s_{k-1} nicht gekürzt werden kann (N'-Eigenschaft), muß das erste Zeichen von w eine Potenz von s_k sein. #

Zu (3): Ist der Konjugationsfaktor gleich 1, so können wir wegen (2) die Anzahl der in P auftretenden x'_{ν_i} verkleinern. □

2.6 Es sei ein x'_{ν_i} konjugiert zu einer Potenz von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ mit negativem Exponenten. x'_{ν_i} hat die Normalform

(1) $a(s_j^{-1}\dots s_1^{-1} s_m^{-1}\dots s_{j+1}^{-1})^{\gamma} a^{-1}$, $\gamma > 0$, a endet weder mit s_j noch mit s_{j+1}^{-1} und hat Normalform.

Es gilt

(2) In dem Produkt müssen alle s_j bis auf eines, s_k^{-1}, in x'_{ν_i} gekürzt werden und dieses eine wird mit s_k^2 multipliziert.

Beweis. (2) folgt wegen $m \geq 3$ aus Gründen der Reihefolge bzw. wegen $\alpha_k \neq 2$. □

Vorerst wollen wir annehmen, daß in P keine x'_{ν_i} auftreten, die mit negativem Exponenten zu einer Potenz von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ konjugiert sind.

2.7 Definition.

Es sei P wie oben. Wir definieren $M = \{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ durch

(i) $y_1 = x'^{\varepsilon_1}_{\nu_1}$

(ii) y_k sei das auf y_{k-1}^{-1} folgende Zeichen in P, falls

y_{k-1}^{-1} auftritt, sonst sei es das auf y_{k-1} folgende $x'^{\varepsilon_i}_{\nu_i}$. Ist y_{k-1}^{-1} bzw. y_{k-1} das letzte Zeichen in P, so sei y_k und alle folgenden y_j gleich 1.

Die erste Hälfte des freigekürzten Wortes y_i sei der Anfangsteil von y_i bis zum standhaften Zeichen. Ist y_i zu einer Potenz von s_j konjugiert, so bezeichne der Konjugationsfaktor die erste Hälfte. Die erste Hälfte eines y_i, das zu einer Potenz von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ konjugiert ist, sei gleich dem in 2.5 (1) definierten a.

Analog sei die zweite Hälfte eines y_i erklärt.

$A(y_i)$ bezeichne ein Anfangsteilwort von y_i, das höchstens gleich der ersten Hälfte von y_i ist. Ein Schritt in der Folge $\{y_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ sei der Übergang von y_i nach y_{i+1}.

2.8 Hilfssatz.

Sei $A(y_i)$ ein Anfangsteilwort von y_i, das ebenfalls ein Anfangsteilwort von $y_i,\ldots,y_{i+k}$ ist. Ferner sei λ der Index des Zeichens, das auf $A(y_i)$ bei y_i folgt. Dann ist der Index des Zeichens, das auf $A(y_i)$ bei y_{i+1}, $1 \le k$, folgt, nicht größer als $\lambda+1$, d.h. der Index steigt pro Schritt um höchstens 1.

Beweis. Betrachte den Schritt von y_{i+s} auf y_{i+s+1} $(s+1 \le k)$. Wir wollen annehmen, daß der Index des Zeichens, das bei y_{i+s} auf $A(y_i)$ folgt, höchstens gleich $\lambda+s$ ist.

(1) $A(y_i)$ wird bei y_{i+s+1} in P gekürzt.

Denn folgt y_{i+s+1} in P auf y_{i+s}, so ist y_{i+s} konjugiert zu einer Potenz von einem s_i oder von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ und $A(y_i)$ ein Teil des Konjugationsfaktors. Also endet y_{i+s} mit $A(y_i)^{-1}$. Folgt y_{i+s+1} auf y_{i+s}^{-1}, so gilt (1), da y_{i+s} mit $A(y_i)$ beginnt.

(2) Ist $A(y_i)$ gleich der ersten Hälfte von y_{i+s}, so gilt die Behauptung.

Denn folgt y_{i+s+1} auf y_{i+s}^{-1}, so ist das standhafte Zeichen eindeutig bestimmt, und das Zeichen vor $A(y_i)^{-1}$ bei y_{i+s}^{-1} hat einen Index höchstens gleich $\lambda+s$ und ist standhaft. Das Zeichen nach

$A(y_i)$ bei y_{i+s+1} hat also den Index um höchstens eins größer als der von y_{i+s}. Genauso folgt die Behauptung, falls y_{i+s} konjugiert zu einem s_j ist. Ist y_{i+s} konjugiert zu einer Potenz $\prod_{i=1}^{m} s_i$, folgt die Behauptung wegen 2.5 (1), (2).

(3) Ist $A(y_i)$ nicht gleich der ersten Hälfte von y_{i+s}, so gilt die Behauptung.

Denn vor $A(y_i)^{-1}$ bei $y_{i+s}^{\pm 1}$ steht das Zeichen, das bei $y_{i+j}^{\pm 1}$, $j \leq s$, nach $A(y_i)$ vorn stand, wobei j minimal ist bezüglich der Eigenschaft, daß $A(y_i)$ nicht gleich der ersten Hälfte von y_{i+j} ist. □

2.9 Hilfssatz.

$A(y_{i_o})$ sei ein Anfangsteilwort von y_{i_o}. $A(y_{i_o})$ ende mit einer Potenz von s_λ. Ist das auf $A(y_{i_o})$ folgende Zeichen eine Potenz von $s_{\lambda+1}$ ($\lambda+1$ mod m), so beginnen $y_{i_o},\ldots,y_{m-2+i_o}$ mit $A(y_{i_o})$.

Beweis. Für y_{i_o} ist die Behauptung trivial. Beim Schritt von y_k auf y_{k+1} sieht die Situation folgendermaßen aus

$$\ldots A(y_{i_o})^{-1} y_{k+1}.$$

Dabei ist $A(y_{i_o})^{-1}$ der letzte Teil von y_k^{-1} bzw. y_k, falls y_k^{-1} nicht auftritt. Kürzt nun y_{k+1} das ganze $A(y_{i_o})$, so gilt die Behauptung. Angenommen also, k+1 sei die erste Stelle, wo nicht das ganze $A(y_{i_o})^{-1}$ gekürzt wird. Insbesondere bleibt dann das erste Zeichen von $A(y_{i_o})^{-1}$, das den Index λ hat, stehen. l_k sei der Index des Zeichens von y_k, das auf $A(y_{i_o})$ bei y_k folgt. Es gilt

$$\lambda \equiv l_k + 1 (m),$$ da das Zeichen in P beim Schritt von y_k zu y_{k+1} stehenbleibt.

Daraus folgt

$$l_k - (\lambda-1) = m-2 \text{ oder } l_k - (\lambda+1) = -2.$$

Ferner gilt

$$\lambda+1 \leq l_k \leq \lambda+1+(k-i_o) \text{ oder } 1 \leq l_k \leq \lambda+1+(k-i_o)-m,$$

da der Index des Zeichens nach $A(y_{i_o})$ wegen 2.8 pro Schritt um höchstens eins steigen kann.

Es folgt

$$0 \le l_k - (\lambda+1) \le k - i_o \text{ oder } l_k - (\lambda+1) \le k - i_o - m \le 0.$$

Insgesamt

$$m-2 \le k - i_o \text{ oder } -2 \le k - i_o - m.$$

Diese Ungleichungen können für $i_o \le k < m-2+i_o$ nicht erfüllt werden. Es kann also nichts von $A(y_{i_o})$ stehenbleiben. (Vergleiche auch [6, 2.4].) □

Erfüllt die erste Hälfte eines y_i die Voraussetzungen von Hilfssatz 2.9, d.h. die erste Hälfte endet mit einer Potenz eines s_λ und das folgende Zeichen hat einen Index $\equiv \lambda+1$, so wollen wir $y_i, \ldots, y_{i+m-2}$ einen <u>Block</u> nennen.

<u>2.10 Hilfssatz</u>.

In einem Block können keine zwei y_i zueinander invers sein.

<u>Beweis</u>. Angenommen, es gilt $y_h = y_j^{-1}$ in einem Block. Dabei sei $h < j$. Sei i_o maximal mit der Eigenschaft, daß y_h und y_j in dem mit y_{i_o} beginnenden Block liegen. Es gilt dann:

$$y_h = A(y_{i_o})S_{l_h}^{\gamma_h} a A(y_{i_o})^{-1} = y_j^{-1}.$$

Dabei sei $A(y_{i_o})$ gleich der ersten Hälfte von y_{i_o}, d.h. $S_{l_h}^{\gamma_h}$ ist das standhafte Zeichen von y_h und $\Delta(a) = 1$ oder $a = 1$. a kann höchstens die Länge 1 haben, da das standhafte Zeichen in der Mitte stehen muß. Gilt $\Delta(a) = 1$, so folgt, daß der Index des standhaften Zeichens pro Schritt um höchstens 1 steigt (2.8) bis auf die Stelle, wo sich die Länge der ersten Hälfte vergrößert, wo also a eingeschoben wird. Hier kann er, wegen $\Delta(a) = 1$, um höchstens 2 steigen. Wegen $l_j \equiv l_h(m)$ müssen y_j und y_h also mindestens m Schritte auseinander liegen. Da aber ein Block nur m-1 der y_k enthält, kann das nicht sein.

Ist $a = 1$, so ergibt sich ein Widerspruch wie oben oder das standhafte Zeichen von y_{k+1} hat auch den Index l_h. Also $y_h = A(y_{i_o})S_{l_h}^{\gamma_h}A(y_{i_o})^{-1}$ und $y_{h+1} = A(y_{i_o})S_{l_h}^{\gamma_{h+1}} \ldots$, was aber wegen 2.3 unmöglich ist. □

Wir definieren nun analog zu den y_i eine Folge z_i.

2.11 Definition.

Es sei $\{z_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ definiert durch

(i) $z_1 = x'^{k}_{\nu_{q'}}{}_{q'}$, das letzte x'_{ν_j} von P

(ii) z_k sei das vor z_{k-1}^{-1} bzw. z_{k-1}, falls z_{k-1}^{-1} nicht auftritt, in P stehende x'^{ε}_{ν}. Ist z_{k-1}^{-1} bzw. z_{k-1} das erste Zeichen des Produktes, so sei $z_i = 1$, $i \geq k$.

Analog zu den y_i bezeichne $E(z_i)$ ein Endteilwort von z_i. Wir erhalten dann die zu 2.8, 2.9 und 2.10 analogen Hilfssätze:

2.12 Hilfssatz.

Sei $E(z_i)$ ein Endteilwort von z_i, das ebenfalls Endteilwort von $z_i,\ldots,z_{i+k}$ ist. Ferner sei μ der Index des Zeichens, das vor $E(z_i)$ bei z_i steht. Dann ist der Index des Zeichens, das vor $E(z_i)$ bei z_{i+l}, $1 \leq k$, steht, nicht kleiner als $\mu-1$, d.h. der Index sinkt pro Schritt um höchstens eins. □

2.13 Hilfssatz.

Sei μ der Index des ersten Zeichens von $E(z_i)$. Steht vor $E(z_i)$ ein Zeichen mit dem Index $\equiv \mu-1$, so enden $z_i,\ldots,z_{m-2+i}$ mit $E(z_i)$. □

Analog zu den y_i sei auch bei den z_i ein Block definiert. Es gilt dann

2.14 Hilfssatz.

In einem Block der z_j können keine zwei z_k zueinander invers sein. □

2.15 Bemerkung.

Es ist keines der y_i, $i \leq m$, gleich 1. Analog ist keines der z_j, $j \leq m$, gleich 1.

Beweis. Angenommen, ein v_i, $i \geq m$, sei gleich 1. Sei i_0 minimal mit dieser Eigenschaft. Dann muß $v_{i_0-1}^{-1}$ bzw. v_{i_0-1} das letzte Zeichen des Produktes sein. In jedem Fall beginnt dann v_{i_0-1} mit einer Potenz von s_m. Wegen 2.6 kann der Index des ersten Zeichens von v_i pro Schritt um maximal 1 steigen. Da v_1 mit s_1 beginnt, brauchen wir mindestens $m-1$ Schritte, um zu s_m als erstem Zeichen zu gelangen. Nach Voraussetzung ist aber $i_0 \geq m$. Also sind die [illegible]

Analog schließt man für die z_i, [illegible]

2.16 Satz.

> Ist $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \neq 0$ [illegible] oder [illegible], $P = \prod_{i=1}^{m} s_i^{\lambda_i}$, so ist die Länge der ersten Hälfte von [illegible] oder die Länge der zweiten Hälfte von z_1 gleich Null.

Beweis. Angenommen, es gilt $\lambda(A(y_1)) < 0$ und $\lambda(B(z_1)) < 0$, wobei $A(y_1)$ gleich der ersten Hälfte von y_1 und $B(z_1)$ gleich der zweiten Hälfte von z_1 ist.

Nach Hilfssatz 2.8 beginnen alle v_i, $i \geq m-1$, mit s_1 und nach Hilfssatz 2.7 sind sie alle verschieden. Sei v_m stehe die [illegible]

$$\ldots s_1^{-1} v_m.$$

Wird nun s_1^{-1} von v_m gekürzt, so beginnt v_m mit s_1. Bleibt s_1 stehen, so beginnt v_m wegen $\lambda_1 \neq 1$ mit s_1^{-1}. Insgesamt beginnen also v_i, $i \geq m$, mit einer Potenz von s_1.

Analog erhält man, daß die z_i, $i \geq m$, mit einer Potenz von s_m enden. Ist nun $n = m-1$ Mächtigkeit des Systems der λ_i, so ergäbe das einen Widerspruch. Denn v_m muß invers zu einem der v_i, $i < m$, sein, also mit einer Potenz von s_1 beginnen und enden. Andererseits ist v_m gleich einem z_i^{-1}, $i < m$, die alle mit s_m enden.

Sei [illegible]

Da v_m sei nicht invers zu einem v_i, $i < m$.

Es folgt, daß alle v_i, $i \geq m$, mit einer Potenz von s_1 beginnen und mit einer Potenz von s_m enden. Für v_{m+1} ergäbe sich dann ähnlich wie oben ein Widerspruch.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

geben kann. Darüberhinaus lassen wir zu, daß wie bei Satz 2.16 bei P auch Konjugierte zu positiven Potenzen von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ auftreten können. Wir nehmen also an, daß nicht alle y_i gleich Potenzen der s_j sind.

Sei y_k das erste Element, das nicht gleich einem s_j ist. Wegen der Bemerkung 2.3 gilt dann: y_k beginnt mit s_k.

<u>2.18</u> Es gilt $k \leq 2$.

<u>Beweis</u>. Jedes der y_i, das nicht gleich einem Konjugierten einer (positiven) Potenz von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ ist, besitzt genau ein standhaftes Zeichen. Falls also bei keinem der y_i ein nicht standhaftes Zeichen auftritt, ergibt sich für $y_i \neq b(\prod_{i=1}^{m} s_i)^{\alpha} b^{-1}$ $\Delta(y_i) = 1$. Das heißt, falls kein Element konjugiert zu einer Potenz von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ ist, tritt dann der Fall (b) des Satzes ein.
Falls doch ein y_i zu $(\prod_{i=1}^{m} s_i)^{\beta}$ konjugiert ist, ist ein Produkt P nicht möglich. Es gibt also ein y_i, das ein nicht standhaftes Zeichen besitzt.
y_{i_o} sei das erste Element, das ein nicht standhaftes Zeichen s_{j_o} vorn besitzt. Wir haben also $A(y_{i_o}) \neq 1$ und erhalten nach Hilfssatz 2.9 und 2.10 m-1 verschiedene y_i, die alle mit s_{j_o} beginnen. Also erhalten wir m-1 verschiedene y_j, die nicht gleich einer Potenz von einem s_k sind. Wegen $n \leq m$ folgt dann die Behauptung. ∎

Analog sei z_l das erste Element, das nicht gleich einem s_j ist. Es folgt $l \leq 2$. Für (k,l) ergeben sich also die folgenden Möglichkeiten, die alle zum Widerspruch geführt werden sollen:

$(k,l) = (1,1), (1,2), (2,1)$.

<u>2.19</u> $(k,l) = (1,2)$

$y_1 = s_1 s_p^{\beta}$ (da s_1 standhaft, keine Potenz)

$y_2 = s_1^2 s_q^{\gamma} \ldots$ (wegen $\alpha_1 \neq 2$)

$z_1 = s_m$

(a) s_{m-1} sei bei z_2 standhaft.

Wir erhalten

$$z_1 = s_m$$
$$z_2 = s_o^{\beta'} s_{m-1}$$
$$z_3 = \dots s_{m-1}^2 \quad (\text{da } \alpha_{m-1} \neq 2)$$

Ist nun s_1^2 bei y_2 nicht standhaft, so beginnen nach Hilfssatz 2.9 $y_2,\dots,y_m$ mit s_1^2 und sind nach Hilfssatz 2.10 alle verschieden. Das ergibt wegen $n \leq m$ und $z_1 = s_m$ einen Widerspruch.

Also ist s_1^2 standhaft. Nach Hilfssatz 2.12 kann der Index des standhaften Zeichens von z_i, angefangen bei z_2, pro Schritt um höchstens 1 sinken, bis auf die Stelle, wo ein nicht standhaftes Zeichen eingeschoben wird. Wegen $\Delta(y_2) = 2$ kann er hier nur um maximal 2 sinken. Um also bei y_2 s_1^2 als standhaftes Zeichen vorn zu erhalten, brauchen wir von z_2 an mindestens m-2 Schritte, d.h. s_{m-1}^2 kann bei z_3 nicht standhaft sein. Ist s_{m-1}^2 aber nicht standhaft, so kann der Index des standhaften Zeichens von z_3 an um maximal 1 pro Schritt sinken ($\Delta(y_2) = 2$) und wir können keine zwei Elemente mit s_1 als standhaftem Zeichen erhalten, denn das standhafte Zeichen von z_3 hat den Index m-2 (mod m).

(b) s_{m-1} bei z_2 ist nicht standhaft.

Nach Hilfssatz 2.13 enden dann $z_2,\dots,z_m$ mit s_{m-1} und wegen $\alpha_{m-1} \neq 2$ endet auch z_{m+1} mit einer Potenz von s_{m-1}. z_{m+1} beginnt und endet also mit einer Potenz von s_{m-1}, da es nach Hilfssatz 2.14 wegen $z_1 = s_m$ zu einem der z_i, $2 \leq i \leq m$, invers sein muß. Also muß auch ein y_i mit einer Potenz von s_{m-1} beginnen und enden. Ist aber einmal das erste Zeichen von einem y_i nicht standhaft, so beginnen nach Hilfssatz 2.9 m-1 weitere y_j mit diesem Zeichen, die außerdem nach Hilfssatz 2.10 alle verschieden sind und mit z_1 zusammen alle x_ν ausmachen. Es muß also bei den y_i das erste Zeichen standhaft sein, bis s_{m-1} eingeschoben werden kann. Wegen Hilfssatz 2.8 kann das standhafte Zeichen aber von y_2 an pro Schritt um höchstens 1 steigen, wir brauchen also m-2 Schritte, um zu einem standhaften Zeichen mit dem Index m-2 zu gelangen. Das kann aber frühestens bei y_{m-1} der Fall sein. Aber zusammen

mit z_1 haben wir dann bereits alle x_ν verbraucht. Der Fall (b) und somit 2.19 sind unmöglich.

<u>2.20</u> $(k,l) = (2,1)$

$$y_1 = s_1$$
$$y_2 = s_2 \ldots$$

(a) s_m bei z_1 ist nicht standhaft.

$z_1,\ldots,z_{m-1}$ enden also nach Hilfssatz 2.13 mit s_m und wegen $\alpha_m \neq 2$ endet auch z_m mit einer Potenz von s_m. z_m ist also invers zu einem der z_i, $i \leq m-1$, und beginnt und endet mit einer Potenz von s_m. Wie vorher folgt für die y_i aus Hilfssatz 2.8, daß das erste Zeichen von y_i, $i \leq m-1$, standhaft sein muß, da wir s_m als erstes Zeichen bei z_m bekommen müssen. Ist jedoch s_2 standhaft bei y_2, so beginnt wegen $\alpha_2 \neq 2$ y_3 mit s_2^2 und wir erhalten einen Widerspruch.

(b) s_m bei z_1 standhaft.

Der Fall ist dual zu 2.19, indem man die y_i durch die z_i ersetzt. Somit ist 2.20 auch nicht möglich. Es bleibt der Fall

<u>2.21</u> $(k,l) = (1,1)$

$$y_1 = s_1 s_1^\beta$$
$$y_2 = s_1^2 \ldots$$

Beginnen $y_1,\ldots,y_m$ mit einer Potenz von s_1 und enden $z_1,\ldots,z_m$ mit einer Potenz von s_m, so ergibt sich ein Widerspruch wie im Beweis von Satz 2.16. Das ist der Fall bei

(i) s_1^2 bei y_2 nicht standhaft und s_m bei z_1 nicht standhaft

(ii) s_1^2 bei y_2 nicht standhaft, $z_2 = \ldots s_m^2$ und s_m^2 nicht standhaft bei z_2.

(a) s_m bei z_1 sei nicht standhaft.

Es folgt wegen (i), daß s_1^2 bei y_2 standhaft ist. Also tritt s_1 zweimal als standhaftes Zeichen auf. y_1, y_2 müssen gleich einem der z_i sein. Es gilt $z_1 = \ldots s_{m-1}^{\gamma} s_m$, wobei s_{m-1}^{γ} das standhafte Zeichen von z_1 ist. Andernfalls würden nach Hilfssatz 2.13 $z_1,\ldots,z_{m-1}$ mit $s_{m-1}s_m$ enden, im Widerspruch zu $\Delta(y_1) = \Delta(y_2) = 2$. Der Index des standhaften Zeichens kann pro Schritt um höchstens 1 sinken (2.12). Wir brauchen also mindestens m-1 Schritte, um von s_{m-1} zu s_1 als standhaftem Zeichen zu gelangen (d.h. zu y_1 bzw. y_2). Also hat z_{m-1} die Gestalt

$$z_{m-1} = s_1^{\alpha} s_m, \ \alpha = 1,2, \text{ da } z_{m-1} = y_1 \text{ oder } y_2.$$

Bei z_m sieht die Situation dann folgendermaßen aus:

$$z_m z_{m-1}^{\pm 1} = \ldots s_m^{\kappa} s_m^{-1} s_1^{\pm\alpha} \quad \kappa \equiv 1,2.$$

Ist nun z_m nicht invers zu einem der z_i, $i < m$, so muß z_m ebenfalls s_1 als standhaftes Zeichen besitzen und es ergibt sich ein Widerspruch zur N'-Eigenschaft.

Also ist z_m invers zu einem der z_i, hat also die Gestalt $s_m^{-1} s_1^{\beta} s_m^{\kappa}$. Analog zu 2.19 (b) ergibt sich ein Widerspruch, da keines der y_i mit s_m beginnen kann.

(b) s_m ist bei z_1 standhaft.

$$z_1 = s_1^{\gamma} s_m$$

$$z_2 = \ldots s_m^2$$

Sei nun s_m^2 bei z_2 standhaft. Um s_1 als standhaftes Zeichen zu erhalten, brauchen wir mindestens m-1 Schritte von z_1 an, da der Index des standhaften Zeichens pro Schritt um höchstens 1 sinken kann, bis auf die Schritte, wo ein nicht standhaftes Zeichen eingeschoben wird. Hier kann er um höchstens 2 sinken. Es folgt, daß s_1^2 bei y_2 nicht standhaft sein kann und damit beginnen $y_1,\ldots,y_m$ mit einer Potenz von s_1 (2.9).

Da wir m-1 Schritte von z_1 berauchen, um s_1 als standhaftes Zeichen zu erhalten, muß an einer Stelle $i_o > 2$ der Index des

standhaften Zeichens um 2 sinken, d.h. es wird ein nicht standhaftes Zeichen am Ende eingeschoben. Nach Hilfssatz 2.13 müssen dann $z_{i_o},\dots,z_{m-2+i_o}$ mit diesem Zeichen enden und sind alle verschieden. Wegen $i_o > 2$ muß dann eines der z_i, $i_o \le i \le m-2+i_o$, invers zu z_1 oder z_2 sein. Damit beginnen also z_1 oder z_2 mit dem eingeschobenen Zeichen. Da aber z_1 und z_2 gleich einem der y_j sein müssen, folgt, daß der Index des eingeschobenen Zeichens 1 sein muß, denn die y_i beginnen mit Potenzen von s_1. Das ist aber unmöglich.

Ist nun s_m^2 nicht standhaft, so folgt wegen (ii), daß s_1^2 bei y_2 standhaft ist und der Beweis erfolgt dual zu dem vorhergehenden.

Somit ist also auch der Fall 2.21 unmöglich.

Das beendet den Beweis von Satz 2.17. □

Wir erhalten noch die folgende Verschärfung von Satz 2.17:

<u>2.22 Satz</u>.

Es sei $G = \langle s_1,\dots,s_m \mid s_i^{\alpha_i} = 1 \rangle$, $m \ge 3$, $\alpha_i \ge 3$, und $\{x_1,\dots,x_n\}$, $n \le m$, ein System von Elementen aus G, das die N'-Eigenschaft hat. Es gelte eine Gleichung

$$(*)\quad P = \prod_{i=1}^{k} x_{\nu_i}^{\varepsilon_i} = y\Big(\prod_{i=1}^{m} s_i\Big)^{\alpha} y^{-1},\ \alpha > 0,\ y \in G$$

und mindestens eines der x_{ν_i} sei nicht zu einer Potenz von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ konjugiert mit dem Konjugationsfaktor y. Dann ist $\{x_1,\dots,x_n\}$ frei äquivalent zu einem System, das eine der beiden Eigenschaften besitzt:

(a) Die Anzahl der zu $\big(\prod_{i=1}^{m} s_i\big)^{\beta}$ konjugierten Elemente ist größer als im ursprünglichen System $\{x_1,\dots,x_n\}$.

(b) Es gilt $m = n$ und $x_i = s_i^{\beta_i}$, $i = 1,\dots,m$, $(\beta_i,\alpha_i) = 1$.

<u>Beweis</u>. Wegen Hilfssatz 2.2 reicht es, zu zeigen, daß im Falle (b) von Hilfssatz 2.2 immer der Fall (b) des Satzes eintritt. Wir haben im Beweis des Satzes 2.17 zugelassen, daß in P Konjugierte von positiven Potenzen von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ auftreten und gezeigt, daß dann eine Produktdarstellung (*) unmöglich ist. Es bleibt zu zeigen, daß (*) nicht gelten kann, wenn in P Konjugierte zu negativen Potenzen von $\prod_{i=1}^{m} s_i$ auftreten.

Es gibt also ein x_{i_o}, das in P auftritt mit $x_{i_o} = a(s_j^{-1}\ldots s_1^{-1}s_m^{-1}\ldots s_{j+1}^{-1})^{\gamma}a^{-1}$, wobei wir uns x_{i_o} in der Normalform von 2.6 aufgeschrieben denken.

(a) $m \geq 4$

Wir bilden nun von x_{i_o} beginnend ähnliche Folgen $\{y_i\}$, $\{z_i\}$ wie in 2.7, 2.11. Es kürzt nach 2.6 (2) das vor x_{i_o} stehende z mindestens zwei s_k, ebenso das nach x_{i_o} stehende y. Es kann also der Hilfssatz 2.9 angewendet werden und wir erhalten m-1 verschiedene (2.10) y_j, die alle mit as_{j+1} beginnen und analog nach 2.13, 2.14 m-1 verschiedene z_j, die alle mit s_ja^{-1} enden.

Wegen $n \leq m$ bilden die y_j bzw. die z_j zusammen mit x_{i_o} bereits das ganze System der x_ν. Deshalb sind die Mengen $\{y_i\}$ und $\{z_j\}$ gleich. Es gibt also m-1 von x_{i_o} verschiedene Elemente, die mit as_{j+1} beginnen und mit s_ja^{-1} enden. Eines der Elemente muß aber mit s_1 beginnen und ein anderes mit s_m enden. Es folgt $a = 1$.

Wegen $\alpha_{j+1} \neq 2$ muß auch das auf $y_{m-1}^{\delta_{m-1}}$ mit $\delta_{m-1} = \pm 1$, je nachdem, ob y_{m-1}^{-1} auftritt oder nicht, folgende Zeichen mit einer Potenz von s_{j+1} beginnen. Da es auch invers zu einem der anderen y_j sein muß, beginnt und endet ein y_i mit einer Potenz von s_{j+1}. Also $j \equiv j+1$, was ein Widerspruch zu $m \geq 3$ ist.

(b) $m = 3$

Aus 2.6 (2) folgt, daß bei x_{i_o} an einer Seite mindestens zwei der s_i^{-1} durch das Nachbarelement beeinflußt werden. OBdA sei das hinten der Fall. Aus Hilfssatz 2.9 folgt dann, daß die beiden weiteren y_i mit as_{j+1} beginnen. Andererseits beginnen aber das erste Zeichen von P und das auf dieses in der Folge $\{y_i\}$ folgende Zeichen mit Potenzen von s_1. Analog enden z_1, z_2 mit Potenzen von s_m, ($\alpha_m \neq 2$, $\alpha_1 \neq 2$). Da eines der z_i aber mit s_ja^{-1} enden muß, folgt wie in (a) $a = 1$ und es ergibt sich wie oben der Widerspruch $j \equiv j+1$.

Damit ist Satz 2.22 bewiesen. □

Es sei hier nun noch der Satz 2 aus [6] zitiert, den wir im nächsten Paragraphen brauchen werden.

2.23 Satz.

Es sei $G = \langle s_1, s_2 \mid s_1^{\alpha_1} = s_2^{\alpha_2} = 1 \rangle$, $\alpha_1 \geq \alpha_2$. Ferner seien $x_1, x_2 \in G$ mit $[x_1, x_2] = (s_1 s_2)^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$. Dann ist das System $\{x_1, x_2\}$ frei äquivalent zu einem der folgenden Systeme:

(a) $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$, $\quad x_1 = (s_1 s_2)^{\beta_1} s_1$, $\quad x_2 = (s_2 s_1)^{\beta_2} s_2$,

(b) $\alpha_1 = 4$; $\alpha_2 = 2$, $\quad x_1 = s_1 s_2 s_1$, $\quad x_2 = s_2 s_1^2$,

(c) $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$, $\quad x_1 = s_1 s_2^{-1}$, $\quad x_2 = s_2^{-1} s_1$,

(d) $\alpha_1 = 3$; $\alpha_2 = 2$, $\quad x_1 = s_1 s_2 s_1^{-1} s_2$, $\quad x_2 = s_2 s_1^{-1} s_2 s_1$.

□

§ 3 Minimale Erzeugendensysteme von Fuchsschen Gruppen

Zuerst ein Hilfssatz aus [8], der die Situation 1.8 (ii) für die von uns betrachteten Gruppen ausschließt.

3.1 Hilfssatz.

Sei $G = \langle s_1,\dots,s_m \mid s_i^{\alpha_i} = s_1 \dots s_m = 1 \rangle = H_1 *_A H_2$ mit

$$H_1 = \langle s_1,\dots,s_l \mid s_i^{\alpha_i} = 1 \rangle$$
$$H_2 = \langle s_{l+1},\dots,s_m \mid s_i^{\alpha_i} = 1 \rangle$$
$$A = \langle (s_1 \dots s_l) = (s_{l+1} \dots s_m)^{-1} \rangle .$$

Dabei sei $l, m-l \geq 2$. Sei $a = s_1 \dots s_l = (s_{l+1} \dots s_m)^{-1}$. Eine Gleichung

$$xa^{\gamma}x^{-1} = a^{\beta},\ \gamma \neq 0,\ x \in G$$

läßt nur die folgenden Möglichkeiten zu:

(a) $x = a^{\delta}$, $\gamma = \beta$,

(b) $l = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 2$ $x \in H_1$, $\gamma = -\beta$

(c) $m-l = 2$, $\alpha_{m-1} = \alpha_m = 2$ $x \in H_2$, $\gamma = -\beta$

(d) $l = m-l = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4$, $\gamma = -\beta$

□

3.2 Hilfssatz.

Sei $G = \langle s_1,\dots,s_m \mid s_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{m} s_i = 1 \rangle$, $\alpha_i > 2$, $m \geq 3$. $\{x_1,\dots,x_{m-1}\}$ sei ein minimales Erzeugendensystem von G. Dann ist keines der x_i konjugiert zu einem s_j^{β}, wobei $(\beta,\alpha_j) = d > 1$ ist.

Beweis. Angenommen, es gibt ein solches x_i. Wir führen dann in G die neue Relation $s_j^d = 1$ ein. Dann erhalten wir die Gruppe $G' = \langle s_1,\dots,s_m \mid s_i^{\alpha_i} = s_j^d = s_1 \dots s_m = 1 \rangle$, die sich von m-2 Elementen erzeugen lassen müßte, im Widerspruch zu [6], denn der Rang von G' ist m-1. □

Aus diesem Hilfssatz folgt zusammen mit 2.1, daß wir annehmen können, daß jedes System von Elementen von G, das bei einer Zerlegung von G in ein freies Produkt mit Amalgam in einem der Faktoren liegt, die N'-Eigenschaft bezüglich der in den Faktoren definierten Länge Δ hat.

Wir können nun das Hauptresultat beweisen:

3.3 Satz.

Sei $G = \langle s_1,\dots,s_m \mid s_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{m} s_i = 1 \rangle$, $m \geq 6$, $\alpha_i \geq 3$. Sei $\{x_1,\dots,x_{m-1}\}$ ein Erzeugendensystem von G. Dann gibt es einen freien Übergang von $\{x_1,\dots,x_{m-1}\}$ zu einem System der Form $\{s_{\nu_1}^{\beta_1},\dots,s_{\nu_{m-1}}^{\beta_{m-1}}\}$ mit $\nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_{m-1}$ und $(\beta_j,\alpha_{\nu_j}) = 1$.

Beweis. Wir wählen Faktorisierungen von G in ein freies Produkt mit Amalgam $G = H_1 \ast_A H_2$ mit

$$H_1 = \langle s_1,\dots,s_k \mid s_i^{\alpha_i} = 1 \rangle$$

$$H_2 = \langle s_{k+1},\dots,s_m \mid s_j^{\alpha_j} = 1 \rangle \qquad k,\ m-k \geq 3$$

$$A = \langle (s_1 \dots s_k) = (s_{k+1} \dots s_m)^{-1} \rangle$$

Nun wenden wir auf unser System $\{x_1,\dots,x_{m-1}\}$ die Nielsensche Kürzungsmethode an und erhalten aus dem Satz 1.8 und dem Korollar 1.11 die folgenden Möglichkeiten für ein zu $\{x_1,\dots,x_{m-1}\}$ frei äquivalentes System.

1. Es gibt ein Produkt $P = \prod_{i=1}^{l} x_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$ in den x_i, das zu einem Element aus A konjugiert ist. Dabei liegen die $x_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$ in einer zu einem Faktor H_i konjugierten Untergruppe und sind nicht alle aus A.

2. Es gibt ein Produkt $P = \prod_{i=1}^{s} x_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$, $x_{\nu_i} \in A$, $P \neq 1$ und in einem Faktor H_i ein Element $x \notin A$ mit $xPx^{-1} \in A$.

3. Alle x_{ν_i} haben eine Länge ≤ 1. $x_1 = \prod_{i=1}^{m} s_i$, $x_1,\dots,x_k$, erzeugen H_1 und liegen in H_1 und $x_1,x_{k+1},\dots,x_{m-1} \in H_2$ und erzeugen H_2.

Der Fall (2) ist jedoch auf Grund von Hilfssatz 3.1 nicht möglich.

Wir wollen zuerst einen Hilfssatz beweisen.

3.4 Hilfssatz.

Es sei x_i ein zu einem Element aus A konjugiert. Dann kann keine Situation (1) eintreten, an der x_1 nicht beteiligt ist, d.h. x_1 tritt in dem Produkt P auf.

Beweis. $P = \prod_{i=1}^{l} x_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$ beschreibe eine Situation (1), an der x_1 nicht beteiligt ist. Nachdem wir die x_{ν_i} geeignet konjugiert haben, was eine freie Äquivalenz beschreibt, können wir Satz 2.22 anwenden, denn wegen 3.2 haben die x_{ν_i} die N'-Eigenschaft. Tritt nun Satz 2.22 (a) ein, so erhalten wir ein weiteres x_i, das zu einem Element aus A konjugiert ist. Durch Einführen der Relation $s_1 \ldots s_k = 1$ erhalten wir

$$G' = G_1' * G_2'.$$

$$G_1' = \langle s_1,\ldots,s_k \mid s_i^{\alpha_i} = \prod_{i=1}^{k} s_i = 1 \rangle,$$

$$G' = \langle s_{k+1},\ldots,s_m \mid s_i^{\alpha_i} = \prod_{i=k+1}^{m} s_i = 1 \rangle$$

G' müßte von m-3 Elementen erzeugt werden, was aber wegen [6] und dem Satz von Grushko [8] ein Widerspruch zum Rang von G' ergibt.

Es muß also 2.22 (b) eintreten.

Dann erhalten wir jedoch durch Kürzen des Faktors H_i, in dem die x_{ν_i} liegen, einen Widerspruch zu Satz 3 aus [6]. Denn wir verlieren m-k+1 bzw. k+1 Erzeugende, da x_1 bei P nicht auftritt.

∎

3.5 Hilfssatz.

Es sei x_1 konjugiert zu einem Element aus A und es trete Situation (1) ein. Dann sind k bzw. m-k der x_j gleich gewissen $s_j^{\beta_j}$, $(\beta_j,\alpha_j) = 1$.

Beweis. Nach geeigneter Konjugation können wir 2.22 anwenden. Wie in 3.4 ergibt dann der Fall (a) von 2.22 einen Widerspruch. Aus 2.22 (b) folgt die Behauptung. ∎

3.6 Hilfssatz.

Es sei $G = H_1 \ast_A H_2$ wie oben. x_1 sei aus A. Ferner mögen $x_2,\ldots,x_k$ gleich Potenzen von gewissen s_j aus H_1 sein. Dann tritt entweder eine Situation (3) ein oder es tritt (1) in H_2 ein. Analog gilt die Behauptung auch für H_2.

Beweis. Es möge (3) nicht eintreten. Dann muß also eine Situation (1) eintreten, an der nach Hilfssatz 3.4 x_1 beteiligt ist. Angenommen, es tritt (1) in H_1 ein. Dann sind wegen der Rangformel [6] keine x_i, $i > k$, daran beteiligt. Es gibt ein s_{i_o} in H_1, das unter $x_2,\ldots,x_k$ nicht vorkommt. Ist nun $P = \prod_{i=1}^{l} x_{\nu_i}^{\varepsilon_i}$ ein freigekürztes Produkt in den x_i, das die Situation (1) repräsentiert, so folgt, daß x_1 nicht mit negativen Exponenten auftreten kann, da ein $s_{i_o}^{-1}$ nicht von den $x_2,\ldots,x_k$ korrigiert werden kann und außerdem $\alpha_{i_o} \neq 2$ gilt. Es tritt x_1 also nur mit positiven Exponenten auf. Es folgt, daß $x_2,\ldots,x_k$ nur im Konjugationsfaktor auftreten können, da die s_i bei x_1 bereits in der richtigen Reihenfolge stehen. Nach dem Beweis von Satz 1 [8] muß dann noch eine Situation (1) bzw. (3) eintreten. ∎

Unter allen zu $\{x_1,\ldots,x_{m-1}\}$ frei äquivalenten Systemen wählen wir nun eines aus, in dem die Anzahl der x_j, die gleich gewissen $s_j^{\beta_j}$, $(\beta_j,\alpha_j) = 1$, sind, maximal ist. l bezeichne die Anzahl dieser x_i. Zu zeigen ist $l = m-1$.

1. $l \geq \left[\frac{m}{2}\right]$

Wir wählen eine Faktorisierung von G wie oben mit $k = [\frac{m}{2}]$. Nach geeigneter Verkürzung tritt dann der Fall (1) oder (3) ein. Tritt (3) ein, so folgt die Behauptung aus dem Satz von Grushko. Es möge also (1) eintreten. Nach geeigneter Konjugation tritt dann Satz 2.22 (a) oder (b) ein, Im Falle (b) gilt die Behaup-

tung. Im Falle (a) erhalten wir nach Konjugation ein $x_i \in A$. Nochmaliges Anwenden von Satz 1.8, 1.11 liefert dann wegen Hilfssatz 3.5 die Behauptung.

2. $l = m-1$

Angenommen, es gilt $l < m-1$. Da $l \geq [\frac{m}{2}]$ wegen 1. ist, gibt es eine Faktorisierung von $G = H_1 \ast_A H_2$ mit

$$H_1 = \langle s_j, \ldots, s_k \mid s_i^{\alpha_i} = 1 \rangle$$
$$H_2 = \langle s_1, \ldots, s_{j-1}, s_{k+1}, \ldots, s_m \mid s_i^{\alpha_i} = 1 \rangle$$
$$A = \langle (s_j \ldots s_k) = (s_{k+1} \ldots s_m s_1 \ldots s_{j-1})^{-1} \rangle$$

(eventuell wird ein s_i durch s_i^{-1} ersetzt.)

Dabei liegen in jedem Faktor gewisse x_i, die gleich Potenzen von s_j sind und s_1, die unter den x_i, die gleich s_j-Potenzen sind, nicht auftreten.

Wir verkürzen nun das System bezüglich dieser Faktorisierung. Dabei bleiben die x_i, die gleich s_i-Potenzen sind, erhalten, da sie die Länge 1 haben. Es könnte höchstens eines nach A gelangen.

In dem Falle wenden wir Satz 1.8, 1.11 an und erhalten beim Entreten von (3) einen Widerspruch zur Maximalität von l und beim Eintreten von (1) folgt der Widerspruch aus den Hilfssätzen 3.6, 3.4 und 3.5.

Wegen des Satzes von Grushko kann (3) also nicht eintreten.

Tritt dann (1) ein, so müssen an der Situation gewisse x_j, die bereits zu s_i-Potenzen konjugiert sind, beteiligt sein. Andernfalls ergibt ein Anwenden von 2.22 einen Widerspruch zur Rangformel [6]. Es müssen die an (1) beteiligten x_i also bereits in einem der Faktoren liegen und wir können 2.22 anwenden, ohne die x_i konjugieren zu müssen. Der Fall (a) von 2.22 führt dann wie oben zu einem Widerspruch (3.4, 3.5).

Im Falle (b) erhalten wir ebenfalls einen Widerspruch zur Maximalität von l, da in jedem Faktor s_i lagen, die unter den x_i, die gleich s_j-Potenzen waren, nicht vorkommen. Es folgt $l = m-1$ und damit die Behauptung von Satz 3.3. □

Der Satz 3.3 macht eine Aussage nur für den Fall $m \geq 6$. Die Fälle $m = 5$ und $m = 4$ enthalten bei einer Faktorisierung von G in ein freies Produkt mit Amalgam einen Faktor, der freies Produkt von nur zwei zyklischen Gruppen ist. Das Problem ist es, den Satz 2.22, der ja die Voraussetzung $m \geq 3$ macht, auch auf diesen Fall zu übertragen. Wird die Gleichung $\prod x_{\nu_i}^{\varepsilon_i} = \prod_{i=1}^{k} s_i$ alternierend, so liefert der Satz 2 aus [6] eine Lösung. Leider können wir keine Aussage machen, falls etwas ähnliches wie in 2.22 (a) eintritt, also eines der beteiligten x_i konjugiert zu einem Element aus dem Amalgam ist. Einige Spezialfälle für $m = 4$ sind in [7] Satz 20 behandelt. Es liegt die Vermutung nahe, daß ein ähnlicher Satz wie 3.3 auch für $m = 4$ und $m = 5$ gilt.

Aus Satz 2.22 folgen zusammen mit [8] Satz 5 bzw. [5] Satz 5 die Resultate von G. Rosenberger ([7], Satz 13, Satz 14) für den Spezialfall $m \geq 3$ und $\alpha_i \neq 2$. Der Beweis verläuft ähnlich dem von Satz 3.3.

Literatur

[1] J. Chiswell, Abstract Length functions in groups, Preprint

[2] R. C. Lyndon, Length functions in groups. Math. Scand. 12 (1963), 209-237

[3] Magnus, Karrass, Solitar, Combinatorial group theory: Presentations of groups in terms of generators and relations. New York-London-Sydney: John Wiley § Sons, Inc. 1966

[4] J. Nielsen, A basis for subgroups of free groups, Math. Scand. 3 (1955), 31-43

[5] N. Peczynski, Eine Kennzeichnung der Relationen der Fundamentalgruppe einer nicht-orientierbaren geschlossenen Fläche, Diplomarbeit, Bochum 1972

[6] N. Peczynski, G. Rosenberger, H. Zieschang, Über Erzeugende ebener diskontinuierlicher Gruppen, Invent. Math. 29 (1975), 161-180

[7] G. Rosenberger, Zum Rang- und Isomorphieproblem für freie Produkte mit Amalgam, Habilitationsschrift, Hamburg 1974

[8] H. Zieschang, Über die Nielsensche Kürzungsmethode in freien Produkten mit Amalgam, Invent. Math. 10 (1970), 4-37

[9] H. Zieschang, E. Vogt, D. Coldewey, Flächen und ebene diskontinuierliche Gruppen, Lecture Notes 122 (1970)

Lebenslauf

Geburtsdatum und -ort	27. Juli 1948 in Dortmund
Eltern	Marian Peczynski und Frau Hildegard geborene Schneider
Geschwister	eine jüngere Schwester, Christel, und ein jüngerer Bruder, Ulrich
Familienstand	verheiratet seit 20.3.1970 mit Gabriele Peczynski geborene Budde
Kinder	zwei, eine Tochter, Kaja, 1.10.1970, und einen Sohn, Mirko, 14.9.1974
Ausbildung	
Grundschule	April 1955 - März 1959 Gertrudisschule in Dortmund
Oberschule	April 1959 - Juli 1967 Helmholtz-Gymnasium in Dortmund
Studium	WS 1967/68 - WS 1971/72 Studium der Mathematik und Wirtschaftswissenschaften an der Ruhr-Universität Bochum Diplomprüfung in Mathematik Februar 1972 September 1973 - Mai 1974 Studium der Mathematik an der University of Michigan, Ann Arbor Seit Mai 1974 Studium der Mathematik an der Ruhr-Universität Bochum